

Modélisation élasto-plastique mésoscopique de l'écoulement de solides amorphes : nos avancées récentes

Alexandre NICOLAS

CONICET & Centro Atómico Bariloche – 8400 S.C. Bariloche – Argentine
LIPhy - Université Grenoble-Alpes & CNRS - F38000 Grenoble - France

Résumé succinct : Malgré leur étonnante diversité, les solides amorphes, une classe de matériaux qui s'étend des verres métalliques aux mousses et émulsions concentrées, présentent des réponses mécaniques semblables, à savoir un régime élastique à faible cisaillement et, sous des contraintes plus importantes, une apparition de plasticité sous la forme de réarrangements brusques et localisés de particules, au sein d'une matrice élastique. Ces réarrangements conduisent à une redistribution de contrainte au sein du milieu élastique. Cet article retrace, de manière succincte, les principales avancées réalisées au sein de notre groupe au Laboratoire Interdisciplinaire de Physique (LIPhy) à Grenoble au cours des dernières années dans le domaine de la modélisation élasto-plastique. Ces avancées comprennent un meilleur éclairage qualitatif du rôle que jouent divers processus physiques dans l'écoulement, l'import d'outils issus de la Physique Statistique pour la description et l'interprétation quantitatives de la rhéologie de ces systèmes et des efforts récents pour rendre les modèles plus réalistes dans leur prise en compte de certains aspects (bruit mécanique, hétérogénéités élastiques, effets inertiels).

Mots-clé : mousses, émulsions, cisaillement, écoulements en micro-canaux, modèles élasto-plastiques, éléments finis, élasticité

S'il rend myope à des différences pourtant conséquentes, l'éclairage de la Physique statistique, permet, de ce fait même, de faire ressortir des mécanismes sous-jacents communs. C'est ainsi qu'un même modèle, le modèle d'Ising, a pu servir à décrire aussi bien la transition paramagnétique-ferromagnétique que la séparation de mélanges de gaz ou encore des phénomènes de ségrégation sociale [1]. La modélisation élasto-plastique s'inscrit dans cette lignée de modèles génériques simples, en cherchant à rendre compte des principaux aspects de l'écoulement de solides amorphes, c'est-à-dire désordonnés.

Cette classe de matériaux est extrêmement diverse : y figurent aussi bien des verres « durs », comme les verres d'oxydes et les verres métalliques, que les solides « mous », en tête desquels on trouve les mousses et émulsions concentrées, les gels et les pâtes colloïdales. L'étude de la réponse mécanique de ces matériaux répond, entre autres, à des enjeux industriels d'importance. Quelques exemples suffiront à illustrer ce point. Commençons par le cas des verres métalliques, des alliages de métaux auxquels un refroidissement très rapide depuis l'état liquide confère un caractère solide tout en maintenant le désordre de leur structure. L'essor technologique de ces matériaux « récents » (dans la mesure où ils datent du milieu du siècle précédent) se voit notamment confronté à leur

trop faible ductilité ; combiné à leur coût élevé et à la difficulté de produire des échantillons de grande taille, ce problème peut reléguer au second plan leurs propriétés mécaniques intéressantes, comme leur haute limite élastique comparativement à leurs pendants cristallins [2]. Dans un autre domaine, des efforts sont faits pour caractériser et améliorer les performances de mousses liquides (constituées de bulles d'air emprisonnées dans un liquide riche en tensio-actifs) dans leur utilisation comme amortisseurs de choc [3]. En guise de dernier exemple, mentionnons l'intérêt que présente le contrôle des propriétés rhéologiques des crèmes cosmétiques, lesquelles sont souvent des suspensions colloïdales ; ces propriétés ont en effet une influence sur la texture du produit et ses modalités d'application.

Bien entendu, pour toutes ces applications, les détails physico-chimiques des matériaux ont une grande importance et des modèles très génériques ne sauraient suffire pour atteindre les objectifs souhaités. Cependant, même d'un point de vue technologique, le développement de modèles à la fois simples et génériques pour appréhender et décrire la déformation ne serait pas dénué d'intérêt, dans la mesure où, malgré leur manque de spécificité, ils pourraient mettre en lumière les processus-clefs contrôlant les propriétés mécaniques.

Quoique très divers, les solides amorphes présentent une réponse mécanique particulière qui les distingue aussi bien de leurs pendants cristallins que des liquides simples. Tenant du solide, ils possèdent une contrainte seuil, en deçà de laquelle la déformation n'est que transitoire. Mais, sous des contraintes de cisaillement plus importantes, ils se déforment irréversiblement et, s'il ne se produit pas de fracture, deviennent généralement d'autant plus fluides qu'augmente la vitesse de déformation. Au-delà de cette similitude macroscopique, l'analogie tient au scénario d'écoulement plus précis. En effet, si l'on considère de petits échantillons, ou encore si l'on observe la déformation lente d'un matériau à l'échelle mésoscopique (entre, disons, une dizaine et un millier de particules), on constate que l'écoulement se produit de manière saccadée et que, loin d'être homogène, il met en jeu des réarrangements rapides et localisés de particules au sein d'un milieu encore élastique [4]. Les modèles élasto-plastiques mésoscopiques s'appuient sur ce scénario de base pour bâtir un cadre descriptif commun pour l'écoulement des solides amorphes ; ils aspirent à faire la lumière sur le comportement macroscopique, complexe, en l'interprétant comme un effet collectif produit par des rouages mésoscopiques simples.

1. Les ingrédients de base de la modélisation élasto-plastique mésoscopique

L'élasticité linéaire constitue un cadre théorique pertinent et en général fiable pour l'étude de la réponse d'un solide à de petites déformations, mais elle ne saurait suffire, en pratique, pour aborder la plupart des problèmes géologiques ou encore industriels, où les matériaux sont exposés à de plus amples déformations (en amont d'une possible fracture). Dans le cadre de la mécanique du milieu continu, cette nécessité s'est notamment traduite par l'adjonction d'une déformation plastique ϵ^{pl} , irréversible (au sens où réduire la contrainte appliquée ne permet pas de la résorber), à la déformation élastique ϵ^{el} dans les équations constitutives macroscopiques reliant la déformation $\epsilon = \epsilon^{pl} + \epsilon^{el}$ à la contrainte σ , par exemple dans les célèbres équations de Prandtl-Reuss [5].

Les capacités descriptives de telles équations constitutives, qui peuvent toujours être améliorées par l'inclusion de nouveaux termes, ne dissipèrent cependant pas les interrogations quant aux fondements microscopiques, ou au moins mésoscopiques, de la réponse mécanique macroscopique. Pour les solides amorphes, l'étude de systèmes modèles comme des

mousses bidimensionnelles, dont les « particules » (les bulles) sont directement observables à l'œil nu ou au microscope, mit en évidence le rôle clef des réarrangements rapides et très localisés de particules dans la déformation à l'échelle microscopique [4] ; dans le cas des « radeaux de bulles » (mousses en deux dimensions), par exemple, ce réarrangement prend la forme d'un échange de voisins entre quatre bulles, baptisé événement T1. Il était dès lors naturel d'identifier ces réarrangements comme les processus élémentaires de la déformation plastique, et tentant de supposer que la complexité du comportement macroscopique provient de l'interaction et de la superposition d'un grand nombre de ceux-ci au sein du matériau. De fait, il est indiscutable que la mise en contact de nombreuses entités au comportement très simple peut aboutir à une phénoménologie riche et à une réponse complexe, l'exemple canonique de ce semblant de paradoxe étant le modèle d'Ising.

À vrai dire, dès 1976, de Gennes [6] avait proposé de décrire l'émergence de la rigidité dans les gels, due au développement de chaînes liées par des interactions attractives (souvent réticulées), comme un processus de percolation sur un réseau de Bravais muni de liens aléatoires entre sites ; plus précisément, sur le réseau, les sites les plus proches ont une probabilité p d'être reliés, et la percolation a lieu lorsque p franchit une valeur critique. L'idée fut abondamment reprise, quelques années plus tard, mais à rebours, c'est-à-dire pour expliquer la fracture d'un matériau soumis à une contrainte par la rupture de liens entre les sites d'un réseau, dont la résistance est aléatoire [7-9]. En incorporant l'idée (i) que ces liens, en l'occurrence des ressorts, ne rompent pas de manière permanente mais peuvent se reformer et (ii) que chaque rupture entraîne une redistribution caractéristique de contraintes au sein du matériau, Chen et ses collègues [10] inaugurèrent la modélisation élasto-plastique sur réseau, quand bien même leur modèle avait pour fin principale la description statistique des tremblements de terre, et non la déformation de solides amorphes.

Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur la philosophie de la démarche entreprise. Il va de soi qu'aucun matériau (à ma connaissance...) n'est constitué, à l'échelle microscopique, de blocs liés par quelques ressorts, encore moins disposés en réseau quadratique, et que, dans les détails fins, la réponse microscopique différera toujours de celle du système modèle. Il se pourrait bien, en revanche, que ce dernier contienne les ingrédients pertinents pour reproduire la réponse macroscopique, en vertu de possibles comportements universels. Dans le cas de Chen *et al.*, l'objectif était

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

d'établir l'apparition de lois de puissance dans les statistiques d'énergie libérée par les tremblements de terre (la loi connue sous le nom de Gutenberg-Richter), ce à quoi leur modèle parvint en effet.

Argon et Bulatov [11] adaptèrent explicitement cette approche à la déformation de solides amorphes, et plus particulièrement à celle des verres métalliques, en incluant en particulier la possibilité pour les blocs élastiques de subir un événement plastique en dessous de la barrière nominale de rupture, par un processus d'activation thermique.

Depuis, de nombreux modèles, mettant l'accent sur différents matériaux et considérant différentes situations d'écoulement, ont vu le jour. En dépit de leur diversité, ces modèles ont ceci en commun qu'ils se fondent sur

- des blocs « mésoscopiques » au comportement par défaut élastique,
- susceptibles de rompre quand un critère de rupture (en général dépendant de la contrainte locale) est rempli
- et redistribuant la contrainte accumulée au reste du milieu lors de ces ruptures, ce qui donne lieu des interactions entre les blocs, et donc éventuellement à des avalanches.

Ces interactions entre blocs sont prises en compte de façons très diverses. Elles peuvent par exemple être traitées de manière approchée, sous la forme d'un « champ moyen » (de contrainte ou déformation, dans un sens large) ressenti par un bloc élasto-plastique fictif, isolé de son entourage. Sont ainsi omises les fluctuations et les corrélations spatiales, au motif que la longue portée des interactions élastiques entre blocs devrait les rendre négligeables [12]. Pourtant, le fait que les interactions sont tantôt positives, tantôt négatives peut inviter à une approximation très différente, qui incorpore la contrainte redistribuée à une température effective, d'origine mécanique : il peut s'agir d'une température d'activation, dans le modèle de « *Soft Glassy Rheology* » de Sollich et collaborateurs [13], ou d'une température mesurant le désordre configurationnel, dans la théorie des zones de transformation de cisaillement (*Shear Transformation Zone Theory*) de Langer et Falk [14]. Si les fluctuations de contrainte redistribuée perçues par un bloc sont plutôt vues comme un bruit blanc aléatoire, une autre approche consiste à en rendre compte par un terme

diffusif opérant sur la distribution de contraintes mésoscopiques dans le matériau [15].

Dans cet article, nous nous concentrerons cependant sur des modèles où les interactions élastiques sont traitées de manière plus détaillée, quoique simplifiée. Plus précisément, la focale sera portée sur le modèle élasto-plastique proposé par Picard et collègues [16] ainsi que sur sa descendance scientifique, en insistant sur les progrès en terme de compréhension physique de l'écoulement auxquels cela a donné lieu. Nous commençons la discussion par un récapitulatif des ingrédients de base de tels modèles, communs aux différentes variantes considérées dans la suite.

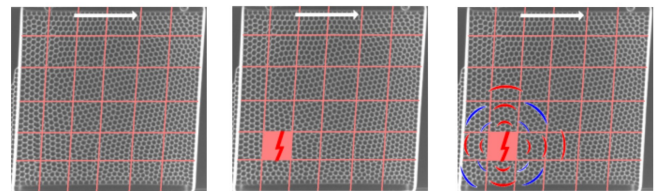


Illustration 1: Modélisation élasto-plastique: (gauche) le système répond de manière élastique, (milieu) un bloc, coloré en rose, subit un événement plastique, (droite) la contrainte qu'il portait est en partie redistribuée. Image de fond: mousse bi-dimensionnelle (S. Ataie-Talebi & C. Quilliet)

Des blocs élastiques par défaut

En premier lieu, le matériau est décomposé en un ensemble de blocs de la taille typique d'un réarrangement plastique ; chacun d'eux est caractérisé par un couple contrainte-déformation (σ, ϵ) et une variable booléenne n dénotant son activité plastique.

Par défaut, on prescrit à ces blocs une réponse élastique ($n=0$), autrement dit, la (partie déviatorique de la) contrainte est proportionnelle à la déformation élastique. Si l'on restreint son attention à la composante de cisaillement des tenseurs, d'indice xy , et que l'on note μ le module de cisaillement, cela donne, en terme de dérivées temporelles,

$$\dot{\sigma}_{xy} = 2\mu \dot{\epsilon}_{xy}.$$

Cette phase élastique ne peut pas se poursuivre éternellement. Trop chargés, les blocs finissent par rompre, basculant alors en phase plastique ($n=1$).

Dynamique du réarrangement plastique

Sous l'hypothèse d'une dynamique suramortie, l'événement plastique consiste en une relaxation progressive, par dissipation visqueuse, de l'énergie élastique accumulée localement. En équilibrant

- (i) la contrainte élastique exercée par les régions alentour, viz., $\sigma_{\text{ext}} = 2\mu\epsilon_{\text{ext}}$ (où la composante non déviatorique des tenseurs est omise), et
- (ii) la contrainte visqueuse $\sigma_{\text{int}} = 2\eta_{\text{eff}}\dot{\epsilon}_{\text{int}}$ (où η_{eff} est la viscosité effective de la région et $\dot{\epsilon}_{\text{ext}} \propto -\dot{\epsilon}_{\text{int}}$ car chaque incrément de déformation de la région intérieure décharge la région alentour d'une partie de la déformation appliquée),

on obtient une dynamique de relaxation exponentielle

sur un temps caractéristique $\tau \equiv \frac{\eta_{\text{eff}}}{\mu}$ [17].

Propagateur élastique

Mais, comme cela a déjà été mentionné, l'événement plastique ne produit pas seulement une relaxation locale : de même qu'une rupture sismique émet des ondes de cisaillement qui se propagent à travers les solides, les réarrangements plastiques engendrent une redistribution de la contrainte dans le matériau, pouvant donner lieu à d'autres « craquements » à distance. Cette redistribution est décrite par un propagateur élastique doté de la même symétrie que le réarrangement local et décrivant l'incrément de contrainte reçu au point $\mathbf{r}=(r, \theta)$. En 1957, Eshelby publia un résultat analytique exact pour le propagateur associé à la déformation d'une inclusion ellipsoïdale au sein d'un matériau élastique unifome [18]. Un calcul effectué dans la limite d'un cisaillement ponctuel conduit cependant à une formule plus simple, laquelle coïncide avec le propagateur d'Eshelby dans le champ lointain. Pour une déformation unitaire à l'origine du repère, en deux dimensions, ce propagateur simplifié a pour expression, en coordonnées polaires [19] :

$$G(r, \theta) = \frac{\cos(4\theta)}{\pi r^2};$$

le champ de contrainte élastique associé est représenté sur la Figure 2. Il vaut la peine de noter que la validité de cette forme fonctionnelle pour la redistribution moyenne de contrainte autour d'un réarrangement a récemment été confirmée aussi bien expérimentalement, dans des émulsions

bidimensionnelles concentrées [20], que numériquement, dans un système vitreux modèle avec un potentiel de Lennard-Jones, simulé par dynamique

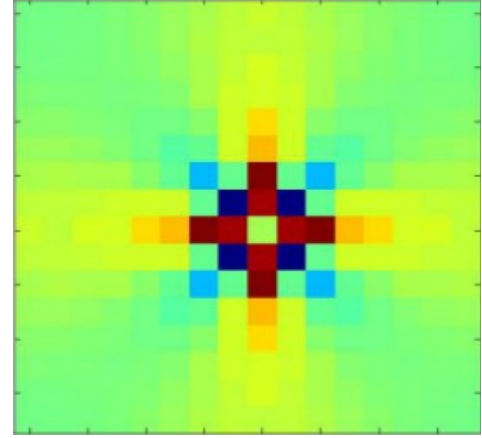


Illustration 2: Propagateur élastique

moléculaire [21].

En assemblant les ingrédients du modèle (voir la figure 1 pour une illustration), on obtient l'équation d'évolution de la contrainte portée par les blocs

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(r, t) = \mu \dot{\gamma} + \int G(r'-r) \frac{n(r', t) \sigma(r', t)}{\tau} dr' \quad (1)$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement appliqué macroscopiquement ; la dynamique de la variable d'activité plastique n est contrôlée par des « règles du jeu » censées refléter la physique à l'œuvre. Essentiellement, n passe à 1 quand la contrainte locale devient trop importante, et revient à 0 une fois un certain temps écoulé (en imposant un taux de recouvrement élastique τ_{res}^{-1} , où τ_{res} est le temps de restructuration locale), ou une certaine déformation accumulée localement.

Quoique physiquement raisonnable, cette définition peu ou prou arbitraire des « règles du jeu » peut sembler compromettre le pouvoir prédictif ou ne serait-ce qu'explicatif des modèles élasto-plastiques. Les sections qui suivent offrent néanmoins un aperçu des apports de ces modèles à la compréhension de la dynamique hors équilibre des solides amorphes, pour laquelle les approches analytiques depuis le niveau microscopique sont d'une complexité redoutable [22].

2. Apports à la compréhension qualitative de l'écoulement de solides amorphes

Un premier apport concerne la compréhension qualitative de la déformation et de l'écoulement des

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

solides amorphes et l'appréhension des processus physiques qui les sous-tendent, ce qui n'est pas vain dans l'optique (éventuelle) de guider des tentatives d'élaboration de matériaux aux propriétés mécaniques prescrites. En effet, selon les ingrédients de base incorporés dans les modèles et la valeur des paramètres choisis, des comportements macroscopiques différents sont susceptibles d'émerger, ce qui permet d'éclairer l'origine de certains aspects universels mais aussi de différences marquées entre matériaux, pour peu que les ingrédients des modèles puissent être reliés à des mécanismes physiques.

Critère d'écoulement par bandes

Un fossé important en pratique sépare les déformations macroscopiquement homogènes de leurs pendant localisés. Ces derniers, dans lesquels seule une bande du matériau se déforme tandis que le reste demeure inerte, posent problème pour bien des applications industrielles. En particulier, l'apparition précoce de cisaillement localisé dans les verres métalliques réduit la ductilité du matériau et conduit à sa rupture, bien entendu indésirable.

Mais ce phénomène de localisation a également été observé dans de nombreux autres matériaux (matériaux granulaires, mousses, suspensions colloïdales, etc.) [23]. Les processus physiques précis qui l'occasionnent sont évidemment très divers. *Est-il malgré tout possible de faire émerger un mécanisme explicatif assez général, transcendant ces détails ?*

Dans nos modèles, nous nous sommes rendu compte qu'allonger la durée τ_{res} des événements plastiques ou encore imposer un « temps de guérison » aux blocs fragilisés par un événement plastique récent (durant lequel leur seuil de rupture est diminué) favorisait le développement d'un plateau de contrainte dans la courbe d'écoulement, associé à un cisaillement localisé. Ces idées vont dans le même sens que l'accent mis sur le « ramollissement » suite à la plasticité dans la littérature sur les verres métalliques, ou encore le temps de réarrangement long dans le scénario simplifié proposé par Coussot et Ovarlez [24].

Plus précisément, dans le modèle de base, Martens et al. [25] ont montré que pour des temps de restructuration τ_{res} longs, un cisaillement localisé était observé. Dans ce régime localisé, la contrainte macroscopique s'obtient comme moyenne pondérée entre les contraintes dans les deux bandes présentes, dont les proportions s'ajustent au forçage $\dot{\gamma}$. Ce moyennage se traduit par un plateau horizontal dans la

courbe d'écoulement $\sigma=f(\dot{\gamma})$, correspondant à $\sigma=cte$. Généralement, cet aplatissement de la courbe d'écoulement est compris comme la conséquence de la présence de portions décroissantes, instables, dans la courbe constitutive du matériau, c'est-à-dire la courbe d'écoulement qui serait observée si un écoulement homogène était imposé. De fait, une courbe constitutive comportant une portion décroissante à faibles $\dot{\gamma}$, dans les régions correspondant à un écoulement localisé, peut être prédite dans le modèle en effectuant une moyenne temporelle de l'Éq. (1), à partir d'une hypothèse de champ moyen (dans laquelle la seule contribution des événements plastiques non locaux à la dynamique locale est d'augmenter le taux de déformation effectif local) [25]. Intuitivement, en effet, quand τ_{res} augmente, la baisse de contrainte consécutive à un événement plastique dure plus longtemps, donc, lorsque $\dot{\gamma}$ augmente et que les événements plastiques se font plus nombreux, la contrainte aura tendance à diminuer.

Dans [26], le modèle employé a été raffiné, pour tenir compte du fait que des « temps de guérison » longs ne signifient pas forcément des réarrangements individuels plus longs, mais peuvent aussi (voire plutôt) être dus à une fragilisation durable post-rupture des régions ayant subi la plasticité, ce qui favorise la survenue de nouveaux événements plastiques aux mêmes endroits. Sans grande surprise, les mêmes tendances ont été constatées que dans le modèle où la « guérison » était contrôlée par le seul paramètre τ_{res} : la propension à la localisation s'accroît quand s'allonge le temps de guérison de la structure. Bien entendu, ce mécanisme général se traduit en pratique par des processus physiques (voire physico-chimiques, par exemple dans les suspensions de laponite) différents selon les matériaux [26], que nous ne détaillerons pas ici.

Origine de la dépendance en $\dot{\gamma}$ de la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$

Autre aspect crucial pour le rhéologue, la courbe d'écoulement d'un matériau permet d'en prédire, avec plus ou moins de fiabilité, le profil d'écoulement dans des géométries variables. (Cette affirmation doit cependant être nuancée quand la géométrie du système donne de l'importance aux contraintes autres que le cisaillement et en présence d'instabilités, ou encore en régime non stationnaire). Dans les situations d'écoulement macroscopiquement homogène, la courbe d'écoulement des solides amorphes comme les mousses, émulsions et suspensions colloïdales est

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

souvent bien décrite par une loi de Herschel-Bulkley de la forme $\bar{\sigma} = \sigma_y + k \dot{\gamma}^m$, où l'exposant m prend fréquemment une valeur proche de 0,5. Non seulement on peut s'interroger sur l'origine de cette forme fonctionnelle assez générale, mais, de manière encore plus fondamentale, le seul fait que la contrainte macroscopique varie avec le taux de cisaillement mérite un éclaircissement.

Certes, pour un liquide simple, la croissance monotone de σ avec $\dot{\gamma}$ ne suscite pas d'interrogation, car la contrainte visqueuse augmente (linéairement) avec le taux de cisaillement. Mais, dans les solides désordonnés lentement cisailés, la contrainte purement dissipative est faible, avec un module de perte G'' négligeable par rapport au module élastique G' pour des déformations assez lentes, si bien que sa contribution à la contrainte globale est quelquefois tout bonnement omise dans les calculs [27]. Il faut donc chercher une autre origine à la courbe d'écoulement de ces matériaux.

À ce sujet, les divers modèles élasto-plastiques mettent en avant des mécanismes tout aussi divers, et il est probable que, dans la réalité aussi, la courbe d'écoulement ait des origines physiques diverses selon le type de matériau.

Considérons ici les matériaux athermiques, dans lesquels les fluctuations thermiques ne jouent aucun rôle. Dans ce cas, il n'y a évidemment pas de sens à arguer d'une compétition entre forçage et activation thermique en guise d'explication. Comme les phases élastiques sont insensibles à $\dot{\gamma}$, ce qu'une simple renormalisation de la variable temps en $t \rightarrow \gamma = \dot{\gamma} t$ fait apparaître clairement, on est conduit à chercher du côté de la durée des réarrangements plastiques, ou éventuellement de cascades de réarrangements, le seul candidat possible pour former un temps caractéristique du matériau à comparer à $\dot{\gamma}^{-1}$. C'est donc bien la perturbation de ces événements plastiques par le forçage extérieur, autrement dit l'opposition à la relaxation totale du système à la survenue d'un événement plastique par le forçage, qui est à l'origine des courbes d'écoulement athermiques.

Afin de rendre compte de cet effet dans les modèles élasto-plastiques, nous avons modifié les règles du jeu [28]: le basculement plastique $n:0 \rightarrow 1$ a lieu dès qu'est franchi un seuil de rupture σ_y (issu d'une distribution exponentielle de barrières d'énergie de rupture), i.e., dès que $\sigma : \sigma \geq \sigma_y^2$. L'événement prend fin, avec $n:1 \rightarrow 0$, à l'instant t_{fin} où une déformation locale fixée γ_{pl} a été cumulée au cours

de l'événement plastique, initié à $t_{début}$, i.e., quand $\int_{t_{début}}^{t_{fin}} 2\dot{\epsilon}(r, t') dt' = \gamma_{pl}$.

Le fait que cette déformation soit plus rapidement cumulée en présence d'un fort taux de cisaillement extérieur $\dot{\gamma}$ raccourcit les événements et peut ainsi interrompre la relaxation plastique à $\dot{\gamma}$ vigoureux. À l'aide de simulations numériques, nous avons montré que cela suffisait à obtenir des courbes d'écoulement de Herschel-Bulkley dont l'exposant m prend des valeurs expérimentales usuelles (autour de 0,6 en l'occurrence).

Bruit mécanique

Un autre scénario permettant de reproduire des courbes de Herschel-Bulkley, scénario au cœur de la théorie *Soft Glassy Rheology* [13], repose sur l'interruption de l'accumulation de contrainte élastique par l'activation thermique d'événements plastiques (que la température associée soit réelle ou effective). Dans la perspective du paysage d'énergie potentielle, le forçage extérieur conduit chaque bloc élasto-plastique (ou sous-système) à « gravir les parois » du puits d'énergie potentielle élastique dans lequel il se trouve; des sauts thermiquement activés lui permettent néanmoins franchir des barrières d'énergie avant d'atteindre le sommet de la barrière. Plus le cisaillement appliqué est vigoureux, plus le système peut accumuler d'énergie élastique avant que l'activation thermique ne le précipite dans un autre puits, par delà une barrière d'énergie, d'où l'obtention d'une courbe d'écoulement croissante.

Ce scénario est-il bien valable quand la température est une température effective due à un « bruit mécanique », c'est-à-dire aux fluctuations de contrainte redistribuée (comme c'est nécessairement le cas dans les matériaux athermiques) ?

Nous avons testé cette hypothèse et montré que, dans nos modèles élasto-plastiques aussi bien que dans un cadre théorique général, elle était mal fondée : le bruit mécanique et l'activation thermique, quoique reposant tous deux sur des fluctuations, conduisent à des statistiques d'évasion des puits d'énergie distinctes. En particulier, contrairement aux processus thermiquement activés, le bruit mécanique dû à des événements plastiques quasi-instantanés n'introduit pas de nouveau temps caractéristique dans le système (autre que $\dot{\gamma}^{-1}$). Dans les faits, on observe, dans les modèles, un comportement de type plutôt diffusif dans le cas des

A. Nicolas, Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes

fluctuations thermiques, qui contraste avec la loi d'Arrhénius (exponentielle) observée dans le cas du bruit mécanique. La différence majeure à la source du contraste tient à ce qu'une fluctuation thermique est, par définition, non persistante : aussitôt qu'elle a eu lieu, une force de rappel s'exerce pour ramener le système vers son état d'équilibre, inchangé. À l'inverse, les fluctuations mécaniques affectant une région du système sont dues à des réarrangements *irréversibles* qui se produisent à distance ; ainsi, chacune de ces fluctuations déplace un peu la position d'équilibre de la région considérable, et ces petits déplacements se somment aléatoirement, sans force de rappel, d'où le comportement de type diffusif. Cette différence est illustrée sur la figure 3.

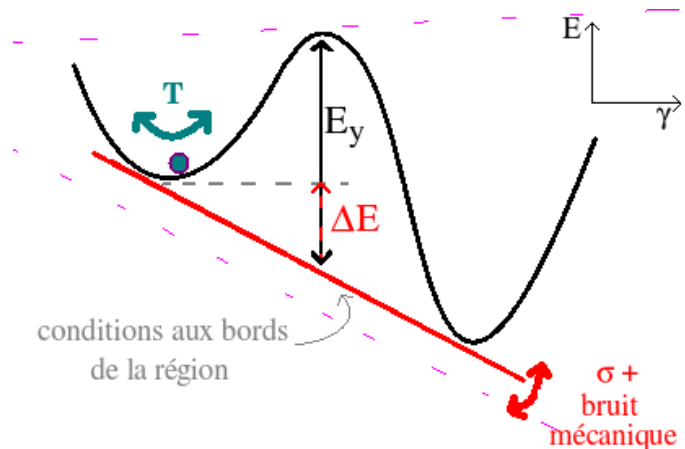


Illustration 3: Paysage d'énergie potentielle exploré par un sous-système : la contrainte appliquée de l'extérieur, conjuguée au bruit mécanique, modifie les configurations accessibles au sous-système (représenté par un disque vert sur le schéma) et tendent à le rapprocher du sommet de la barrière d'énergie (ou du point selle en plus hautes dimensions). Les fluctuations thermiques, quant à elles, ne modifient pas le paysage d'énergie potentielle accessible, aussi le franchissement de barrière d'énergie n'a-t-il lieu que lorsque surviennent des fluctuations particulièrement favorables, donnant lieu à des « sauts » infréquents.

Cet argument a été affiné par la considération du fait que les fluctuations thermiques agissent sur la variable de configuration interne de la région (par exemple, la déformation locale) tandis que les fluctuations mécaniques opèrent sur la contrainte à laquelle le voisinage soumet la région [29]. Dans ce même travail, il a ensuite été établi analytiquement, sur la base du

modèle de Hébraud-Lequeux [15], dépourvu de résolution spatiale, que la courbe d'écoulement était qualitativement insensible à la présence de désordre dans les barrières d'énergie, contrairement à l'effet très marqué que ce désordre joue dans des modèles centrés sur l'activation thermique, à l'image de *Soft Glassy Rheology* ; en particulier, ce type de désordre n'affecte pas l'exposant m de la loi de Herschel-Bulkley. Dans la même veine, un travail plus récent [30] a montré que l'exposant m est en revanche modifié par l'introduction d'une dépendance du module de cisaillement, ou encore du temps de relaxation, au taux de cisaillement. L'article [30] insiste aussi sur la question, d'importance pratique, de la fenêtre de taux de cisaillements utilisée pour l'ajustement de la courbe de Herschel-Bulkley dans la détermination de m .

Coopérativité spatiale dans l'écoulement

Toute approche locale de l'écoulement, ne prenant en compte les réarrangements non locaux que par le biais d'un « champ moyen » lié à l'activité plastique locale, est vouée à l'échec quand la géométrie utilisée implique une forte dépendance spatiale de l'écoulement, accentuée par les corrélations de longue portée à l'œuvre dans le système. En particulier, l'application d'une surpression à l'entrée d'un microconduit (pour forcer l'écoulement d'émulsions concentrées) produit une contrainte de cisaillement très hétérogène dans la largeur du conduit, atteignant sa valeur maximale au voisinage des parois et s'annulant au centre, où l'écoulement prend la forme d'un « bouchon » transporté par le flot (voir la figure 4). Expérimentalement, cette hétérogénéité a fait ressortir des effets non locaux spectaculaires : dans des géométries quasi-bidimensionnelles, Goyon et al. ont montré qu'aucune équation rhéologique locale n'est alors en mesure d'expliquer l'écoulement dans le canal [31], tandis que Pierre Jop et ses collègues ont établi la présence de fluctuations $\delta \dot{\gamma}$ du taux de cisaillement local dans le bouchon (correspondant à la région $\sigma(r) \leq \sigma_y$), qui a pourtant l'air de n'être que translaté globalement par le flot [32]. Ces phénomènes coopératifs étaient alors interprétés dans le cadre d'une équation de diffusion de la fluidité

$$f \equiv \frac{\dot{\gamma}}{\sigma}, \text{ à savoir}$$

$$\xi^2 \Delta f + (f_{\text{bulk}} - f) = 0,$$

A. Nicolas, Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes

où f_{bulk} est la fluidité qui serait obtenue dans un écoulement homogène et ξ est une longueur de corrélation. Cette équation fut justifiée théoriquement par la suite dans le cadre d'un scénario élasto-plastique [33]. Néanmoins, le raisonnement mené à cette fin se borne à l'ordre dominant de la portée du propagateur élastique et ne tient donc pas compte de sa forme fonctionnelle, pas plus qu'il ne retient les fluctuations temporelles. Par l'incorporation de ces éléments dans l'étude, la modélisation élasto-plastique offre une vision plus complète de la situation.

Après avoir ajusté les paramètres du modèle élasto-plastique (dans une version légèrement distincte de celle exposée précédemment) de façon à reproduire la rhéologie macroscopique des émulsions micrométriques considérées expérimentalement (gouttes constituées d'un dérivé de siloxane dans un mélange de glycérol et d'eau), nous nous sommes interrogés sur les sources précises des déviations observées entre rhéologie locale et rhéologie macroscopique. Nos simulations indiquent que le couplage entre les lignes d'écoulement soumises à de faibles contraintes et celles soumises à de fortes contraintes (par le biais du propagateur élastique) n'a qu'un rôle secondaire dans le phénomène. La source principale semble être la rhéologie spécifique à l'œuvre aux parois du conduit, ce qui est en accord avec l'accroissement très notable des déviations observé expérimentalement lors du remplacement de parois lisses par des parois rugueuses. Il a été suggéré, à titre d'hypothèse, que cette rhéologie spécifique était due aux déformations et collisions des gouttelettes contre les aspérités des parois en présence (attestée) de glissement pariétal (*wall slip*), ces collisions générant alors un bruit mécanique aux alentours, par le biais du propagateur élastique [18]. En outre, l'inclusion d'un tel bruit mécanique au niveau des parois permet de mieux reproduire l'allure du profil de fluctuations de taux de cisaillement mesuré par Jop et ses collègues au voisinage des parois. Notons cependant que, même sans l'ajout artificiel de ce bruit mécanique pariétal, les profils numérique et expérimental de $\delta\dot{\gamma}$ coïncident de manière pour le moins satisfaisante loin des parois du conduit.

Au-delà de l'éclairage qualitatif qu'elle offre et des hypothèses physiques qu'elle suggère pour expliquer les observations expérimentales, la comparaison directe entre modèles et expériences menée dans le cadre d'écoulements en microcanal fournit, mettons-le en exergue, une preuve du pouvoir descriptif semi-quantitatif des modèles élasto-plastiques.

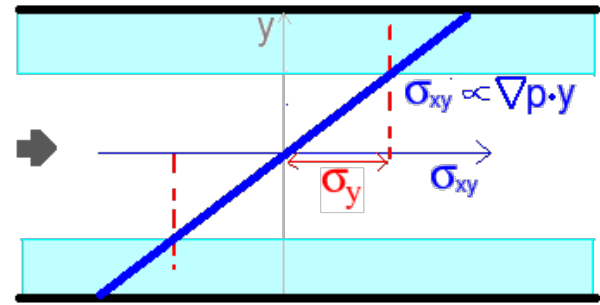


Illustration 4: Schéma d'un écoulement de fluide à seuil (de contrainte seuil σ_y) au travers d'un microconduit. La ligne bleue représente la contrainte de cisaillement, nulle au centre du conduit et maximale aux parois. Les régions bleue ciel sont les seules où, si l'on en croit la courbe d'écoulement, la contrainte appliquée serait assez forte pour permettre la déformation du matériau.

3. Outils de Physique Statistique pour la modélisation

En parallèle de cet éclairage d'observations expérimentales, les modèles élasto-plastiques, offrant des temps de calcul très avantageux, permettent l'étude numérique de propriétés statistiques fines de l'écoulement, qui demeurent souvent hors de portée expérimentale (par exemple à cause d'une trop faible résolution spatiale ou de la difficulté d'acquérir des données dans certains régimes) et d'obtention difficile avec des simulations à l'échelle particulière du fait de temps de calcul prohibitifs. Ce changement de focale s'accompagne, tout naturellement, de l'import d'approches et d'outils issus de la Physique statistique, dans le domaine de la rhéologie des solides amorphes (mentionnons par exemple les mesures de corrélations, les analyses de taille finie, l'extraction de lois d'échelle au voisinage de points critiques et relations entre les exposants critiques). La pertinence d'un éclairage par la Physique statistique prend notamment racine dans l'interprétation de la mise en écoulement des solides athermiques comme une transition de phase hors équilibre [35]. Cette perspective a gagné de l'ampleur au cours des dernières années, au point qu'aux yeux de certains, la rupture élasto-plastique à l'application d'une contrainte dépassant la contrainte-seuil a sa place comme exemple paradigmatique de transition de phase hors équilibre ; on comprend alors l'intérêt de la recherche et de l'étude de modèles minimalistes qui en rendent compte [35].

A. Nicolas, Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes

S'il existe bien un point critique, on peut s'attendre à observer des longueurs de corrélation divergentes dans son voisinage. Cette attente est confirmée par plusieurs simulations numériques à l'échelle particulière [36]. Dans ces simulations comme dans les modèles élasto-plastiques, différentes définitions de longueurs de corrélation sont envisageables. Par exemple, on peut étudier la valeur moyenne des chutes de contrainte (dues aux épisodes de relaxation plastique) dans le chronogramme de la contrainte globale $\bar{\sigma}(t)$, en fonction de la taille du système, et définir la longueur de corrélation $\xi(\dot{\gamma})$ comme la taille linéaire du système à partir de laquelle s'opère un changement de régime ; ce dernier est alors vu comme la conséquence du fait que le système, devenu trop petit ($L < \xi(\dot{\gamma})$), « coupe les corrélations » [16]. Une autre mesure possible des corrélations de contraintes locales $\sigma(r, t)$, plus sophistiquée et étudiée dans [37] et [26], s'appuie sur la susceptibilité χ_4 à quatre points de la contrainte, autrement dit la variance des corrélations temporelles locales de contrainte $\langle \sigma(r, t) \sigma(r, t + \Delta t) \rangle - \langle \sigma(r, t) \rangle^2$, où les crochets représentent une moyenne sur les réalisations ou sur les temps. Cette mesure donne une idée du nombre de blocs dont l'évolution de contrainte est fortement corrélée (dans le sens suivant : « si, durant un certain intervalle de temps, la contrainte locale diminue en r , alors elle diminue probablement aussi en r' »).

Il se trouve que plusieurs longueurs de corrélation mesurées dans les modèles élasto-plastiques varient comme $\dot{\gamma}^{-\frac{1}{d}}$, où d (=2 généralement) est la dimension de l'espace, en accord avec les résultats de simulations de dynamique moléculaire [38]. *Quelle explication proposer à cette loi d'échelle ?* En fait, $l \propto \dot{\gamma}^{-\frac{1}{d}}$ est la distance de séparation moyenne entre événements plastiques dans le cas athermiques. L'idée qu'ils écrantent mutuellement les contraintes qu'eux-mêmes redistribuent (au sens d'un brouillage statistique) conduit alors naturellement à la relation précédente. Plus précisément, on peut montrer, sous l'hypothèse assez fruste d'une distribution uniforme des réarrangements, que le bruit mécanique perçu en un certain point de l'espace ne dépend du détail des positions des événements plastiques que si ceux-ci se produisent dans le disque de rayon $l(\dot{\gamma})$ autour du point considéré, tandis que ceux qui ont lieu au-delà se fondent dans un bruit indiscriminé, dont les fluctuations sont négligeables par rapport à la moyenne (non nulle) [26].

Cependant, il faut noter que cette loi d'échelle en $\dot{\gamma}^{-\frac{1}{d}}$ n'est pas universelle : elle n'est pas respectée pour certaines longueurs de corrélations dans certaines variantes du modèle élasto-plastique. En particulier, la longueur de corrélation issue de χ_4 , plus sensible au détail et à la forme des avalanches, dépend des « règles du jeu » imposées dans le modèle. En revanche, la prise en compte du caractère tensoriel, plutôt que scalaire, de la contrainte, n'importe guère, ce qui est cohérent avec les résultats plus récents obtenus par Budrikis et al. dans le régime quasi-statique, également avec une approche élasto-plastique [39].

Une analyse fine des chutes de contrainte macroscopique qui ponctuent le chronogramme $\bar{\sigma}(t)$ permet une caractérisation plus précise de la possible transition dynamique à la mise en écoulement, ainsi que des cascades de ruptures plastiques qui l'accompagnent. À cette fin, d'importants volumes de données ont été collectés avec le modèle élasto-plastique produisant une courbe d'écoulement de Herschel-Bulkley, en deux (2D) et trois (3D) dimensions et à différents taux de cisaillement, puis comparés aux données équivalentes obtenues dans des simulations particulières de dynamique moléculaire, dans le régime quasi-statique, pour les tailles de système compatibles avec des simulations longues [40]. On postule une lois de puissance pour la distribution $P_S(S)$ des chutes de contrainte S :

$$P_S(S) = S^{-\tau} f(S/S_c)$$

où $S_c = L^{d_f}$ représente la taille critique au-delà de laquelle les avalanches d'événements plastiques saturent le système et d_f est la dimension fractale de ces avalanches. Il se trouve que la forme fonctionnelle proposée décrit bien les données et, de manière tout à fait intéressante, les valeurs des exposants τ (=1,28 en 2D et 1,25 en 3D) et d_f (=0,9 en 2D et 1,3 en 3D) sont très semblables à celles obtenues par dynamique moléculaire, ainsi qu'avec les valeurs rapportées par Salerno et Robbins, toujours sur la base de dynamique moléculaire [41]. Par ailleurs, les valeurs de d_f proches de l'unité suggèrent des avalanches de forme très étirée selon un axe. De manière non moins notable, les exposants mesurés dans la limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, et a fortiori, à $\dot{\gamma} = 0$, diffèrent des prédictions de champ moyen – et ce, malgré la longue portée du propagateur élastique, alors que les raisonnements de champ moyen sont théoriquement

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

valides pour des interactions de portée infinie (mais monotones !). Les prédictions de champ moyen ne sont recouvertes qu'à plus fort taux de cisaillement, quand les événements plastiques se font plus nombreux et leurs corrélations, moins cruciales. En revanche, les équations liant les différents exposants critiques (*scaling relations*) se révèlent fiables.

Ainsi, la modélisation élasto-plastique permet d'aller au-delà du raisonnement de type champ moyen et de tester la validité des explications élaborées sur cette base. Un autre exemple intéressant de cette mise à l'épreuve de prédictions théoriques concerne la relaxation thermique des amorphes, qu'ils soient mous (gels, mousses) ou durs (verres métalliques), en l'absence de déformation. Expérimentalement, le résultat, quelque peu surprenant, qui a émergé ces dernières années est que le facteur de structure dynamique $S(q,t)$, où q est le vecteur d'onde et t , l'intervalle temporel, suit à temps courts une décroissance balistique en forme d'exponentielle comprimée, c'est-à-dire

$$S(q,t) \sim e^{-(qt)^\gamma}, \text{ avec } \gamma > 1.$$

Bouchaud et Pitard proposèrent une explication de type champ moyen de ce comportement, s'appuyant sur les déplacements élastiques $u(r)$ induits à longue portée (en $u(r) \propto r^{1-d}$) par tout réarrangement local [42]. Ferrero et al. ont confirmé la validité de cette explication à temps courts à l'aide d'un modèle élasto-plastique et rapporté des valeurs d'exposants ($\gamma \approx 1,8$) comparables aux valeurs expérimentales et entièrement compatibles avec les prédictions de champ moyen ($\gamma = 2$) [43]; la question de la correspondance entre temps expérimentaux et temps caractéristiques du modèle demeure en suspens. À temps « longs », du fait de l'effet cumulé de multiples événements plastiques, un régime diffusif est observé, avec $S(q,t) \sim e^{-q^2 t}$, conformément aux attentes. Cependant, un nouveau régime a également été mis au jour, à temps intermédiaires entre le régime balistique et le régime diffusif; il s'est vu attribué aux corrélations dans l'activité plastique, qui, rappelons-le encore une fois, sont négligées dans le scénario de champ moyen.

4. Vers des modèles élasto-plastiques plus réalistes

Les recherches de lois d'échelle et mesures d'exposants critiques exposées dans la section précédente reposent sur des modèles élasto-plastiques minimalistes, ce minimalisme se justifiant par l'espoir – non dénué de fondement – que les lois d'échelle obtenues soient insensibles aux détails de l'implantation, autrement dit,

que seuls soient pertinents pour l'étude de la transition les quelques ingrédients majeurs des modèles.

Néanmoins, la comparaison directe avec des expériences ou des simulations de dynamique moléculaire peut souffrir de cette simplicité. En effet, si les propriétés macroscopiques ou locales (courbe d'écoulement, autocorrélations de la contrainte locale, densité de réarrangements plastiques) coïncident bien entre dynamique moléculaire et modèles élasto-plastiques, comme nous avons eu à cœur de l'établir [44], le recours à des observables plus fines montre rapidement les limites d'une telle approche. En particulier, les corrélations spatio-temporelles entre événements plastiques semblent fortement surestimées dans nos modèles et leur évolution temporelle, mal reproduite [44].

Une imprécision assez évidente dans la modélisation trouve sa source dans les suppositions d'uniformité élastique du milieu et d'instantanéité de la redistribution élastique (autrement dit, l'absence de délai de propagation dans le propagateur élastique G). Pour remédier à ces déficiences et passer outre ces suppositions, des routines numériques offrant plus de souplesse ont récemment vu le jour au sein du groupe, dans lesquels une méthode d'éléments finis, plus polyvalente, s'est substituée au recours à une formule analytique pour le propagateur G .

Sans entrer dans les détails algorithmiques, ce type de méthode présente plusieurs avantages. Non seulement elle prend en compte les effets inertiels, jusqu'alors absents de la description, mais en plus les différents éléments composant le système peuvent être dotés de constantes élastiques différentes, pour refléter l'hétérogénéité élastique du matériau. Ainsi, il est possible de fournir en entrée (*input*) du programme les paramètres mécaniques mesurés dans le système-référence (dans notre cas, le modèle de verre utilisé en dynamique moléculaire), à savoir la distribution des constantes élastiques locales, le coefficient de frottement microscopique, la masse des particules et la taille des zones de réarrangements. Dès lors peuvent être comparées dans le détail, pour commencer, les réponses élastiques à un événement plastique (cisaillement local) imposé, en terme de champ de

A. Nicolas, Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes

déplacement induit. Les réponses temporelles moyennées sur le désordre élastique¹ sont en excellent accord entre les deux approches numériques, comme l'illustre la figure 4, et l'amplitude des fluctuations entre échantillons dues à ce désordre est du même ordre de grandeur dans les deux systèmes [45]. Cet accord est donc très prometteur pour une modélisation élasto-plastique plus réaliste.

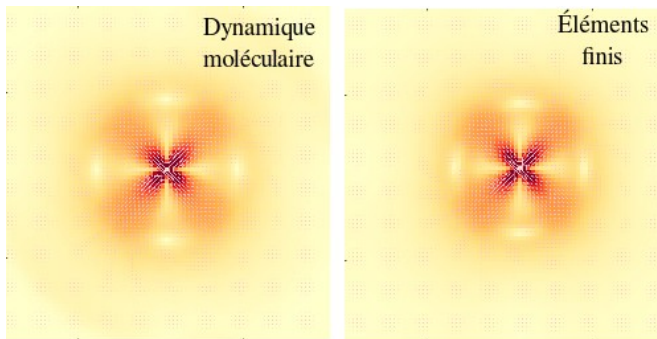


Illustration 5: Champ de déplacement moyenné (sur plusieurs réalisations du désordre élastique) en réponse à une transformation de cisaillement imposée à l'origine. Vue instantanée 10 unités de temps après le début de la transformation de cisaillement, dans un système légèrement sous-amorti. L'accord entre les méthodes s'étend au-delà de la similitude d'apparence : les champs simulés sont quantitativement très proches.

De fait, allant au-delà de la simple réponse élastique, Karimi et Barrat ont étudié l'écoulement stationnaire (sous cisaillement simple) de systèmes plus ou moins sous-amortis avec une telle approche [46]. Aspect notable s'il en est, les courbes d'écoulement obtenues s'incurvent vers le bas à mesure que l'amortissement est réduit, jusqu'à devenir non monotones, ce qui reflète tout à fait la situation observée en dynamique moléculaire [47] : les systèmes fortement sous-amortis présentent une courbe d'écoulement décroissante jusqu'à un certain taux de cisaillement, au-delà duquel le mécanisme collisionnel standard d'augmentation de la contrainte avec $\dot{\gamma}$ reprend le dessus. Par ailleurs, l'efficacité numérique de l'approche utilisée a permis

1 Dans le modèle élasto-plastique, les constantes élastiques de chaque bloc sont tirées aléatoirement de la distribution mesurée dans le système particulière, et il est donc possible de faire une moyenne sur les différentes répartitions de ces constantes dans le matériau.

d'étudier sur des temps très longs le comportement des bandes de cisaillement détectées dans les simulations. Malgré tout, force est de reconnaître qu'au niveau quantitatif, il demeure, entre l'approche élasto-plastique et le modèle particulière, des écarts très sensibles entre les coefficients d'amortissement marquant le passage à une courbe d'écoulement non monotone.

5. Conclusion

Pour conclure ce bref passage en revue de quelques contributions (sélectionnées avec une évidente partialité) de la modélisation élasto-plastique à l'étude de la déformation et de l'écoulement des solides désordonnés, il me semble profitable de mettre en regard ces avancées (mais aussi les limites constatées) avec les horizons ouverts par le modèle d'Ising pour les transitions de phase à l'équilibre. Évidemment, il ne saurait s'agir d'égaliser les mérites d'un modèle que ses succès ont déjà fait passer à la postérité et de modèles dont l'assise gagnerait à être affermie ; voyons plutôt cela comme un effort pour mettre à profit l'éclairage historique offert par le premier.

Tout d'abord, les deux modèles font fi de l'immense majorité des détails des systèmes qu'ils prétendent représenter (des matériaux magnétiques dans un cas et des solides désordonnés dans l'autre) pour se concentrer sur quelques ingrédients jugés cruciaux. Ainsi, des systèmes étudiés, Lenz proposa à son étudiant Ising de ne retenir que l'existence d'un moment magnétique (en l'occurrence -1 ou 1) et les interactions de ces spins entre sites voisins. Dans les modèles élasto-plastiques, seuls les piliers du scénario (assez consensuel) de déformation des amorphes sont retenus, à savoir un comportement de base élastique du matériau, qu'interrompent des réarrangements plastiques localisés. Ces réarrangements sont décrits comme des transformations de cisaillement prenant place au sein d'une grille de sites et interagissant par le champ de contrainte quadrupolaire que chacune génère. Du fait de leur généralité, ces modèles peuvent en principe s'appliquer à des systèmes d'apparences très diverses, ce qui bien entendu n'a d'intérêt que si une certaine universalité sous-tend effectivement leurs réponses particulières.

En faisant varier les paramètres des deux modèles, des changements qualitatifs spectaculaires peuvent être observés. L'apparition d'un moment magnétique macroscopique à la diminution de la température en est un dans le modèle d'Ising. Dans les modèles élasto-plastiques, l'allongement du temps de restructuration ou, de manière assez équivalente, du « temps de

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

guérison » des blocs après une rupture conduit à la localisation macroscopique de la déformation dans des bandes de cisaillement, alors que le système se déforme de manière macroscopiquement homogène sinon. Une phénoménologie riche et intéressante émerge donc macroscopiquement, en dépit de la simplicité des ingrédients des modèles, que ce soit à l'équilibre dans le modèle d'Ising ou hors d'équilibre dans les modèles élasto-plastiques.

En outre, la simplicité des modèles, alliée à la possibilité de les simuler numériquement à moindre coût, rend possible une analyse fine des transitions observées, avec l'établissement de lois d'échelles entre variables et le calcul d'exposants critiques. Pour la transition de mise en écoulement des solides désordonnés, les lois d'échelle obtenues pour les tailles d'avalanches d'événements plastiques et les valeurs des exposants critiques ont pu être comparées, avec succès dans certains régimes, avec celles obtenues dans le cadre de simulations particulières. Il reste encore, cependant, à étudier plus précisément le domaine de validité de ces modèles et, le cas échéant, à tenter d'étendre ce domaine (par exemple vers les taux de cisaillement finis) grâce à des ajustements idoines, qui sans doute renseigneront encore davantage sur la physique à l'œuvre. On sait en effet que certaines modifications en apparence purement techniques peuvent affecter fortement les comportements critiques, en témoigne la différence entre le modèle d'Ising en 2D et le modèle XY. Par ailleurs, dans le cas du modèle d'Ising tout comme dans celui des modèles élasto-plastiques, des raisonnements de type « champ moyen », négligeant l'effet des corrélations spatiales et des fluctuations, ont été proposés, mais leurs prédictions se trouvent invalidées dans une certaine gamme de paramètres (à basses dimensions spatiales d dans le modèle d'Ising, en particulier $d=1$; à très faibles taux de cisaillement dans les modèles élasto-plastiques, où les corrélations sont fortes).

Au-delà des comportements d'échelle au voisinage des points critiques, les modèles élasto-plastiques ont déjà montré une certaine cohérence avec les observations expérimentales et les résultats obtenus avec des modèles particulières. En particulier, les effets non locaux mis en évidence dans des écoulements de suspensions concentrées à travers des microcanaux ont été reproduits semi-quantitativement. En ce qui concerne les simulations à l'échelle particulière, on peut se réjouir d'un bon accord sur la courbe d'écoulement, des propriétés locales, ainsi que l'allure générale des corrélations spatio-temporelles entre événements plastiques. Cela étant, pour ces dernières,

l'accord demeure au mieux qualitatif, avec une forte surévaluation de l'intensité des corrélations dans le modèle élasto-plastique. Il convient donc désormais de s'atteler au perfectionnement de ces modèles, en abandonnant par exemple de l'hypothèse un peu étroite d'une propagation des interactions élastiques instantanée dans un milieu uniforme. L'obtention d'un accord quantitatif sur ces variables sophistiquées fournirait une irréfutable assise à la modélisation élasto-plastique.

Remerciements

Cet article reprend des travaux et des idées issus de l'ensemble des membres du groupe « Phistique Statistique et Modélisation » du LIPhy, auquel l'auteur adresse ses remerciements sincères.

Références

- [1] Stauffer, D. (2008). Social applications of two-dimensional Ising models. *American Journal of Physics*, **76**(4), 470-473.
- [2] Wang, W. H., Dong, C., & Shek, C. H. (2004). Bulk metallic glasses. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, **44**(2), 45-89.
- [3] Le Goff, A., Quéré, D., & Clanet, C. (2014). Shooting in a foam. *Soft matter*, **10**(35), 6696-6704.
- [4] Argon, A. S., & Kuo, H. Y. (1979). Plastic flow in a disordered bubble raft (an analog of a metallic glass). *Materials science and Engineering*, **39**(1), 101-109.
- [5] Chen, Wai-Fah, and Da-Jian Han. *Plasticity for structural engineers*. J. Ross Publishing, 2007.
- [6] De Gennes, Pierre-Gilles. "On a relation between percolation theory and the elasticity of gels." *Journal de Physique Lettres* **37.1** (1976): 1-2.
- [7] De Arcangelis, L., S. Redner, and H. J. Herrmann. "A random fuse model for breaking processes." *Journal de Physique Lettres* **46.13** (1985): 585-590.
- [8] Gilabert, A., et al. "The random fuse network as a model of rupture in a disordered medium." *Journal de Physique* **48.5** (1987): 763-770.
- [9] Hansen, Alex, Stephane Roux, and H. J. Herrmann. "Rupture of central-force lattices." *Journal de Physique* **50.7** (1989): 733-744.
- [10] Chen, K., Bak, P., & Obukhov, S. P. (1991). Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes. *Physical Review A*, **43**(2), 625.

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

- [11] Bulatov, V. V., & Argon, A. S. (1994). A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior. I. Numerical approach and strain localization. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2(2), 167.
- [12] Dahmen, Karin A., Yehuda Ben-Zion, and Jonathan T. Uhl. "Micromechanical model for deformation in solids with universal predictions for stress-strain curves and slip avalanches." *Physical review letters* 102.17 (2009): 175501.
- [13] Sollich, P., Lequeux, F., Hébraud, P., & Cates, M. E. (1997). Rheology of soft glassy materials. *Physical review letters*, 78(10), 2020.
- [14] Falk, M. L., and J. S. Langer. "Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids." *Physical Review E* 57.6 (1998): 7192.
- [15] Hébraud, P., & Lequeux, F. (1998). Mode-coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials. *Physical review letters*, 81(14), 2934.
- [16] Picard, G., Ajdari, A., Lequeux, F., & Bocquet, L. (2005). Slow flows of yield stress fluids: Complex spatiotemporal behavior within a simple elastoplastic model. *Physical Review E*, 71(1), 010501.
- [17] Nicolas, A., & Barrat, J. L. A mesoscopic model for the rheology of soft amorphous solids, with application to microchannel flows. *Faraday Disc.*, 167 (2013), 567-600.
- [18] Eshelby, John D. "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems." *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 241. No. 1226. The Royal Society, 1957.
- [19] Picard, G., Ajdari, A., Lequeux, F., & Bocquet, L. (2004). Elastic consequences of a single plastic event: A step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids. *The European Physical Journal E*, 15(4), 371-381.
- [20] Desmond, Kenneth W., and Eric R. Weeks. "Measurement of Stress Redistribution in Flowing Emulsions." *Physical review letters* 115.9 (2015): 098302.
- [21] Puosi, F., Rottler, J., & Barrat, J. L. (2014). Time-dependent elastic response to a local shear transformation in amorphous solids. *Physical Review E*, 89(4), 042302.
- [22] Fuchs, Matthias, and Michael E. Cates. "Theory of nonlinear rheology and yielding of dense colloidal suspensions." *Physical review letters* 89.24 (2002): 248304.
- [23] Schall, P., & van Hecke, M. (2009). Shear bands in matter with granularity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1), 67.
- [24] Ovarlez, G., Rodts, S., Chateau, X., & Coussot, P. (2009). Phenomenology and physical origin of shear localization and shear banding in complex fluids. *Rheologica acta*, 48(8), 831-844.
- [25] Martens, K., Bocquet, L., & Barrat, J. L. (2012). Spontaneous formation of permanent shear bands in a mesoscopic model of flowing disordered matter. *Soft Matter*, 8(15), 4197-4205.
- [26] Nicolas, A., et al. Universal and non-universal features in coarse-grained models of flow in disordered solids. *Soft Matter* (2014), 10(26), 4648-4661.
- [27] Tighe, Brian P., et al. "Model for the scaling of stresses and fluctuations in flows near jamming." *Physical review letters* 105.8 (2010): 088303.
- [28] Nicolas, A., Martens, K., & Barrat, J. L. . Rheology of athermal amorphous solids: Revisiting simplified scenarios and the concept of mechanical noise temperature. *EPL* (2014), 107(4), 44003.
- [29] Agoritsas, E., Bertin, E., Martens, K., Barrat, J. L., (2015). On the relevance of disorder in athermal amorphous materials under shear 71. *The European Physical Journal E*, 38(7).
- [30] Agoritsas, Elisabeth, and Kirsten Martens. "Nontrivial rheological exponents in sheared yield stress fluids." *arXiv preprint arXiv:1602.03484* (2016).
- [31] Goyon, J., Colin, A., Ovarlez, G., Ajdari, A., & Bocquet, L. (2008). Spatial cooperativity in soft glassy flows. *Nature*, 454(7200), 84-87.
- [32] Jop, P. et al. Microscale rheology of a soft glassy material close to yielding. *Physical review letters* (2012), 108(14), 148301.
- [33] Bocquet, Lydéric, Annie Colin, and Armand Ajdari. "Kinetic theory of plastic flow in soft glassy materials." *Physical review letters* 103.3 (2009): 036001.
- [34] Nicolas, A., & Barrat, J.-L.. Spatial cooperativity in microchannel flows of soft jammed materials: A mesoscopic approach. *Physical review letters* (2013) 110(13): 138304.
- [35] Jaiswal, P. K., Procaccia, I., Rainone, C., Singh M. Mechanical Yield in Amorphous Solids: A First-Order Phase Transition, *Physical review letters* (2016) 116, 085501
- [36] Bailey, N. P., Schiøtz, J., Lemaître, A., & Jacobsen, K. W. (2007). Avalanche size scaling in sheared three-dimensional amorphous solid. *Physical review letters*, 98(9), 095501.
- [37] Martens, K., Bocquet, L., & Barrat, J. L. (2011). Connecting diffusion and dynamical heterogeneities in actively deformed amorphous systems. *Physical review letters*, 106(15), 156001.
- [38] Lemaître, Anaël, and Christiane Caroli. "Rate-dependent avalanche size in athermally sheared amorphous solids." *Physical review letters* 103.6 (2009): 065501.
- [39] Budrikis, Z., Fernandez-Castellanos, D., Sandfeld, S., Zaiser, M., & Zapperi, S. (2015). Universality of Avalanche Exponents in Plastic Deformation of Disordered Solids. *arXiv preprint arXiv:1511.06229*.
- [40] Liu, C., Ferrero, E. E., Puosi, F., Barrat, J. L., & Martens, K. (2015). Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition. *Physical review letters*, 116, 065501.

A. Nicolas, *Modélisation élasto-plastique: nos avancées récentes*

[41] Salerno, K. Michael, and Mark O. Robbins. "Effect of inertia on sheared disordered solids: Critical scaling of avalanches in two and three dimensions." *Physical Review E* 88.6 (2013): 062206.

[42] Bouchaud, J-P., and E. Pitard. "Anomalous dynamical light scattering in soft glassy gels." *The European Physical Journal E* 6.3 (2001): 231-236.

[43] Ferrero, E. E., Martens, K., & Barrat, J. L. (2014). Relaxation in yield stress systems through elastically interacting activated events. *Physical review letters*, **113**(24), 248301.

[44] Nicolas, A., Rottler, J., & Barrat, J.-L.. Spatiotemporal correlations between plastic events in the shear flow of athermal amorphous solids. *EPJE* (2014), **37**(6), 1-11.

[45] Nicolas, A., Puosi, F., Mizuno, H., & Barrat, J. L. (2015). Elastic consequences of a single plastic event: towards a realistic account of structural disorder and shear wave propagation in models of flowing amorphous solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **78**, 333-351.

[46] Karimi, K., & Barrat, J. L. (2016). Role of inertia in the rheology of amorphous systems: A finite-element-based elastoplastic model. *Physical Review E*, **93**(2), 022904.

[47] Nicolas, A., Barrat, J. L., & Rottler, J. (2015). Effects of inertia on the steady-shear rheology of disordered solids. *Physical review letters*, **116**, 058303.