LP25. Traitement analogique d'un signal électrique. Étude spectrale. Exemples et applications.

Antoine Bérut, David Lopes Cardozo

Bibliographie

– Physique tout en 1 première année, M.-N. Sanz, DUNOD
– Électronique PSI, P. Brenders, BRÉAL
– Expériences d'électronique, Duffait.

Rapport Jury

Rapport Jury

Prérequis

– Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.
– Électrocinétique, notation complexe pour les signaux.

Table des matières

Nous savons déjà qu'un circuit électrique peut être décrit par des équations différentielles mettant en jeu le courant et les tensions perçues par ses composants. Ces équations régissent l'évolution temporelle de ces grandeurs et on peut donc s'intéresser à la charge ou la décharge d'un condensateur soumis à un échelon de tension ou à l'établissement d'un courant dans une bobine. On met ainsi en évidence le comportement en régime transitoire de ces éléments lors de variations brusques d'une tension ou d'un courant continu imposé à leurs bornes. Toutefois, l'un des intérêts de l'électronique est le traitement et le transport de signaux physiques (c'est à dire de grandeurs mesurables : température, éclairement, position...) qui peuvent être a priori quelconques et nous allons donc nous intéresser à la réponse d'un circuit soumis à une tension ou un courant évoluant dans le temps.

1 Analyse fréquentielle d'un signal électrique

1.1 Système électrique linéaire invariant dans le temps

Commençons par l'exemple simple d'un circuit RC série. Un générateur impose un tension e aux bornes d'une résistance et d'un condensateur en série. On s'intéresse au cas où l'excitation est une tension purement sinusoïdale : $e(t) = Ecos(\omega t)$. On sait par la loi des mailles que : $e = u_R + u_C$. La loi d'Ohm $u_R = Ri$ et la relation courant tension pour un condensateur $i = C\frac{du_C}{dt}$ nous permettent d'écrire $\frac{du_C}{dt} + (\frac{1}{RC})u_C = (\frac{1}{RC})e$. Notre système est décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Nous savons résoudre ce genre d'équation : la solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec le terme de forçage.

Nous pouvons voir ici la tension $e(t)$ comme un signal d'entrée et $u_C(t)$ comme une sortie : le circuit reçoit en entrée $e(t)$ et la modifie en une sortie $s(t) = u_C(t)$ (mais on aurait aussi bien pu prendre une autre tension ou le courant comme sortie ou comme entrée). De manière générale pour un Système Linéaire (formé de composants dont la caractéristique peut être modélisée par une équation différentielle linéaire [1]) et Invariant dans le Temps (les caractéristiques des composants sont indépendantes du temps) (SLIT) tous signaux d'entrée et de sortie (tension ou courant) peuvent être reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} \tag{1}$$

Nous savons qu'au bout d'un temps suffisamment long par rapport au temps caractéristique de réponse du système, nous pouvons négliger la solution du régime transitoire pour ne s'intéresser qu'au régime sinusoïdal forcé. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Dans le cas du circuit RC :

- La résolution de l'équation homogène $\frac{du_H}{dt} + (\frac{1}{RC})u_H = 0$ nous donnera le comportement transitoire en $u_H = Ae^{-t/\tau}$ où $\tau = RC$. Cette solution tend bien vers 0 pour les temps suffisamment longs.
- La résolution de l'équation inhomogène (c'est-à-dire avec le terme de forçage) peut se faire facilement à l'aide de la notation complexe ($x(t) = Xcos(\omega t + \phi) = Re(\tilde{x})$ où $\tilde{x} = Xe^{j\omega t}e^{j\phi}$). Ici on cherche u_I sous la forme $\tilde{u_I} = Ue^{j\omega t}e^{j\phi}$ où ω est la pulsation du forçage. On trouve donc $j\omega\tilde{u_I} + (1/\tau)\tilde{u_I} = (1/\tau)Ee^{j\omega t}$ soit $Ue^{j\phi} = \frac{E}{1+\tau j\omega}$.

1.2 Fonction de transfert harmonique

Nous cherchons maintenant une représentation simple de l'équation différentielle caractéristique du système. La notation complexe va nous permettre de l'obtenir. Nous avons vu que pour un $e(t)$ purement sinusoïdale on pouvait résoudre le problème en prenant $\tilde{e}(t) = Ee^{j\omega t}e^{j\phi_e}$ pour entrée et en cherchant une sortie de la forme $\tilde{s}(t) = Se^{j\omega t}e^{j\phi_s}$. L'équation 1 devient alors :

$$a_0\tilde{s}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k (j\omega)^k \tilde{s}(t) = b_0\tilde{e}(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k (j\omega)^k \tilde{e}(t) \tag{2}$$

1. cela peut n'être vrai que dans une plage de fréquences d'utilisation, comme pour l'AO

Soit :

$$(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (j\omega)^k)\tilde{s}(t) = (b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k (j\omega)^k)\tilde{e}(t) \tag{3}$$

Et donc :

$$H(j\omega) = \frac{\tilde{s}(t)}{\tilde{e}(t)} = \frac{b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k (j\omega)^k}{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (j\omega)^k} \tag{4}$$

On appelle $H(j\omega)$ la fonction de transfert harmonique et sa connaissance caractérise entièrement la réponse du système pour un forçage à pulsation donnée.

1.3 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Bien évidemment, dans la réalité, les signaux d'entrée ne se limitent pas à des cosinus ou des sinus de pulsation donnée, et on aimerait pouvoir étudier la réponse du système pour n'importe quelle entrée. Ceci va être rendu possible par la linéarité du système et la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique.

En effet, tout signal s périodique (pour lequel il existe une période T telle que s(t+T) = s(t) pour tout t) peut s'écrire comme une somme de composantes sinusoïdales. Un fondamental de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et une infinité d'harmoniques dont la pulsation est un multiple entier de ω :

$$\begin{aligned}
s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)] && (5)\\
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt && (6)\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)cos(n\omega t)dt && (7)\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)sin(n\omega t)dt && (8)
\end{aligned}$$

Ou de manière analogue :

$$\begin{aligned}
s(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n cos(n\omega t + \phi_n) && (9)\\
c_0 &= a_0 && (10)\\
c_n &= \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} && (11)\\
cos(\phi_n) &= \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}} && (12)\\
sin(\phi_n) &= \frac{-b_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}} && (13)
\end{aligned}$$

Les coefficients constituent le spectre de Fourier du signal, c'est-à-dire qu'ils donnent une représentation fréquentielle du signal (par opposition à la représentation temporelle classique). De manière imagée, ils donnent une indication sur le poids relatif des composantes à différentes fréquences existant dans le signal. Par exemple, un signal purement sinusoïdal n'aura que ses composante a_1 et b_1 non nulles. Le même signal auquel on ajoute une composante continue aura en plus un a_0 non nul.

La linéarité intervient ensuite. Comme le système est linéaire, on sait que si on a une solution s_1 pour une excitation sinusoïdale $e_1(\omega_1, t)$ et une solution s_2 pour une excitation sinusoïdale $e_2(\omega_2, t)$, alors on a $s_1 + s_2$ qui est solution pour l'excitation $e_1(\omega_1, t) + e_2(\omega_2, t)$. Et comme on sait maintenant résoudre l'équation différentielle pour une entrée purement sinusoïdale on sait aussi la résoudre pour tout signal périodique !

1.4 Exemple de décomposition : le signal créneau

Cf. transparent sur le créneau : p.11 du Bréal.

2 Les filtres linéaires

2.1 Définitions

Un filtre linéaire est un SLIT dont la fonction de transfert n'est pas constante par rapport à ω. Il peut déphaser, amplifier ou atténuer indépendamment chaque composante spectrale de l'entrée, sans que le spectre de la sortie ne comporte de nouvelle pulsation. Pour une entrée $e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n cos(n\omega t + \phi_n)$ on obtient une sortie $s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n cos(n\omega t + \phi'_n)$.

On appelle ordre du filtre, l'ordre de l'équation différentielle en le signal de sortie (c'est-à-dire l'ordre "n" dans les équations 1 à 4).
Un filtre peut être actif ou passif selon que ses composants sont alimentés ou non.

2.2 Comment représenter la fonction de transfert d'un filtre : diagramme de Bode

On a vu qu'un filtre agit de deux façons sur le fondamental et les harmoniques d'un signal : il modifie leurs amplitudes et leurs phases, les deux aspects étant contenus dans la fonction de transfert. On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert l'ensemble de deux diagrammes :
- la courbe de Gain, donnant l'action sur les amplitudes : $G(dB) = 20log(|H(j\omega)|)$ (dB pour décibels) tracé en logarithmique.
- la courbe de phase, donnant l'action sur les phases : $\Phi(\omega) = arg(H(j\omega))$ (en rad ou degré) tracé en échelle log.

On appelle pulsation de coupure : ω_c tel que $|H(j\omega_C| = H_{max}/\sqrt{2}$. Et s'il en existe au moins une, on appelle bande passante à $-3dB$ l'ensemble des ω tels que $|H(j\omega_C| > H_{max}/\sqrt{2}$. $-3dB$ car $20\log(1/\sqrt{2}) = -3$.

2.3 Le filtre passe-bas du 1^{er} ordre : exemple du circuit RC

Reprenons notre circuit RC du début :

$$\frac{ds}{dt} + (\frac{1}{RC})s = (\frac{1}{RC})e \tag{14}$$

Où s est la tension aux bornes du condensateur et e la tension imposée aux bornes de RC. C'est un système du premier ordre puisque régit par une équation différentielle d'ordre 1. On a :

$$j\omega s + (\frac{1}{RC})s = (\frac{1}{RC})e \tag{15}$$

et donc

$$\frac{s}{e} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \tag{16}$$

- $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$: $H \to 0$ quand $\omega \to +\infty$ et $H \to 1$ quand $\omega \to 0$: on a un filtre passe-bas. $\omega_C = 1/RC$ car $H = 1/\sqrt{2}$ pour $\omega = \omega_C$.
- $\Phi(\omega) = arg(H(j\omega) = -arctan(\omega/\omega_C)$: $\Phi \to 0$ quand $\omega \to 0$ et $\Phi \to -\pi/2$ quand $\omega >> \omega_C$.

Exemple pratique : On prend $R = 1k\Omega$, $C = 100nF$ ($f_C \approx 1620Hz$). On constate le comportement général avec des sinusoïdes de fréquences différentes. On envoie un carré de fondamental supérieur à ω_C et on récupère un triangle. On a un comportement intégrateur à haute fréquence. En effet, pour $\omega >> \omega_C$, $s = \frac{1}{j\omega/\omega_C}e$ soit $Re(s) = \omega_C \int Re(e)dt$.

Intérêt : si on sait que le signal d'intérêt physique est à basse fréquence, on peut décider que toute haute fréquence est un bruit parasite qu'il faut filtrer.

2.4 Le filtre passe-bande du 2^{nd} ordre

Exemple : RLC série, la sortie étant la tension de la résistance. $e = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C$. On a cette fois une équation linéaire du second ordre. L'écriture complexe donne avec $s = u_R$:

$$H(j\omega) = s/e = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \tag{17}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \tag{18}$$

Avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

On peut définir deux fréquences de coupure : $\omega_1 = \frac{1}{2}(\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta})$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta})$, avec $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2$. On voit alors que $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$, lié à la largeur de la bande passante.

Exemple pratique avec : $L = 10mH$, $C = 100nF$, $R = 100\Omega$ (pour avoir une assez faible bande passante) ou $R = 1k\Omega$. On a $f_C \approx 5kHz$ et $Q \approx 3$ ou $Q \approx 30$.
Diagramme de Bode : passe-bande et pentes à $-40dB$ pour $\omega >> \omega_0$ et $40dB$ pour $\omega << \omega_0$. Pas de déphasage à ω_0, et déphasage de $\pi/2$ pour $\omega << \omega_0$ et $-\pi/2$ pour $\omega >> \omega_0$.

En physique, il est fréquent que le signal que l'on cherche à mesurer soit perturbé par du bruit, c'est-à-dire une composante parasite qui s'additionne au signal d'intérêt et peut éventuellement le masquer complètement si son amplitude est grande devant celle du signal. Un filtre passe-bande permet d'isoler des fréquences d'intérêt, toutefois le filtre ne peut être infiniment sélectif et s'il l'était, il serait alors difficile de le centrer parfaitement sur la fréquence d'intérêt. Une autre méthode existe, plus efficace : la détection synchrone.

3 Application : détection synchrone

3.1 Principe de la détection synchrone

Le principe de la détection synchrone est d'utiliser la connaissance exacte de la fréquence du signal de sortie d'un système afin de pouvoir l'extraire du bruit.
Pour se faire, on multiplie le signal de sortie, qui est la somme du signal d'intérêt (de fréquence ω_s) et d'un bruit quelconque, par un signal sinusoïdal de fréquence ω_s, et on utilise un filtre passe-bas pour ne récupérer que la composante continue du signal ainsi créé. Comme le bruit fait a priori apparaître des composantes spectrales à des pulsations ω quelconques, le produit de ces composantes par la sinusoïde à ω_s va donner des sinusoïdes à $\omega_s - \omega$ et $\omega_s + \omega$ qui seront non-nulles, et seront donc filtrées. Le filtre passe-bas peut être très sélectif et n'a pas à être réglé sur une fréquence de coupure particulière.

NB : Si on ne connait pas la fréquence du signal d'intérêt, on peut balayer en fréquence le signal par lequel on multiplie la sortie, et observer la réponse obtenue.

3.2 Application à la mesure d'une fonction de transfert d'un système linéaire

Supposons que l'on veuille caractériser la fonction de transfert d'un filtre linéaire quelconque dont la sortie est très faible et donc noyée dans le bruit. En utilisant la détection synchrone pour des entrées purement sinusoïdales de fréquences connues, on peut reconstruire la fonction de transfert du filtre, malgré la présence du bruit.

En choisissant une entrée $e(t) = cos(\omega t)$ on a une sortie $s(t) = |H(\omega)|cos(\omega t + \phi) + bruit$. En multipliant la sortie par l'entrée, on obtient :

$$s_{ds} = \frac{1}{2}|H(\omega)|(cos(\phi) + cos(2\omega t + \phi)) + bruit(t)cos(\omega t) \tag{19}$$

En utilisant un filtre passe-bas sélectif pour ne garder que la composante continue, on récupère $u_{ds} = \frac{1}{2}|H(\omega)|cos(\phi)$. Ce qui n'est pas alors suffisant pour déterminer indépendamment $|H(\omega)|$ et ϕ.

Il suffit alors de prendre le signal $s(t)$ et de le multiplier par le signal $e(t)$ déphasé d'une demi-période. Le signal alors obtenu a pour composante continue $v_{ds} = \frac{1}{2}|H(\omega)|sin(\phi)$, ce qui permet de caractériser entièrement la fonction de transfert du filtre.

Bien évidemment, cet exemple n'est qu'illustratif, mais il faut bien retenir que la détection synchrone est une technique très utilisée dès qu'il s'agit d'augmenter le rapport signal/bruit, ce qui devient très rapidement nécessaire lorsqu'on cherche à mesurer des signaux de très faible amplitude.

3.3 Action d'une non linéarité sur le filtrage

Nous venons de voir que l'introduction d'un élément non linéaire enrichit le spectre du signal (ici lorsqu'on multiplie l'entrée du système qu'on veut caractériser par sa sortie, on introduit un terme en e^2 d'où la non-linéarité). De manière générale, un élément non linéaire va voir sa caractéristique dépendre de l'excitation qu'il subit. Ainsi, un filtre non linéaire possède une fonction de transfert qui dépend de l'entrée imposée : $\tilde{s}(t) = H(j\omega, \tilde{e}(t))\tilde{e}(t)$. Dans ce cas, le spectre de la sortie va être enrichit par rapport à celui de l'entrée.

Exemple simple : si pour $e(t) = cos(\omega t)$ on a $s(t) = e(t)^2$ alors, en utilisant la formule de trigonométrie $cos(\omega t)^2 = \frac{1+cos(2\omega t)}{2}$, on voit tout de suite que la sortie aura une composante continue ($\omega = 0$) et une composante de pulsation 2ω, qui n'existaient pas dans le signal initial.

Autre exemple : une diode a une caractéristique non linéaire. On peut faire sentir avec les mains que lorsqu'une diode change d'état (passant ou bloquant), elle introduit une variation brutale du signal qui va se traduire par l'apparition de nombreuses harmoniques dans la décomposition en série de Fourier du signal (cf. la fonction créneau dont les "irrégularités" se traduisent par une infinité d'harmoniques).

4 Conclusion

On peut faire une ouverture sur la transformée de Fourier qui permet d'étendre ce genre de discussion à tous les signaux de durée finie. On peut insister sur l'intérêt de pouvoir traiter les signaux pour tous les problèmes d'acquisition (rapport signal/bruit) ou de transmission (modulation, démodulation) de signaux.