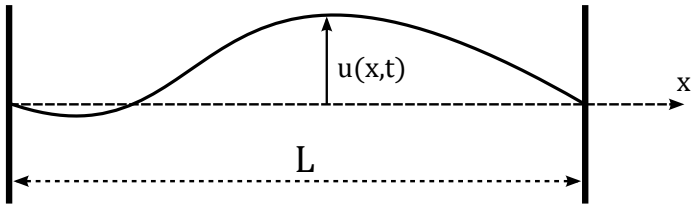
TD1 Physique du solide
Ondes et mécanique quantique

I Vibrations d'une corde tendue

On considère un corde de longueur L tendue horizontalement, dont les extremités en $x = 0$ et $x = L$ sont fixées. On note $u(x,t)$ le déplacement vertical à l'abscisse x et temps t. Pour faciliter les calculs, on adopte une notation complexe $\underline{u}(x,t)$: le déplacement $u(x,t)$ est simplement la partie réelle de $\underline{u}(x,t)$.



On admet que le mouvement de la corde obéit à l'équation d'onde:

$$c^2 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

1. Quelle est l'unité de la quantité c et que représente-t-elle? Montrer que la forme

   $$\underline{u}(x,t) = u_0\, e^{i(\omega t - kx)}$$

   est solution de l'équation d'onde si ω et k sont liés par une relation que l'on précisera. Quelles sont les noms, unités et significations physiques de ω et k? Relier ces quantités à la longueur d'onde et à la période de l'onde.
   La corde étant fixées à ces extrêmités, les mouvements possibles de la corde doivent obéir aux conditions aux limites (CLs) $\underline{u}(0,t) = 0$ et $\underline{u}(L,t) = 0$. La solution trouvée respecte-t-elle les CLs?

2. Pour trouver une solution harmonique (oscillant sinusoïdalement dans le temps) et obéissant aux CLs, on la cherche sous la forme:

   $$\underline{u}(x,t) = \psi(x)\, e^{i\omega t}$$

   Trouver l'équation vérifiée par la partie spatiale $\psi(x)$. Etant données les CLs, quelles sont les solutions possibles pour $\psi(x)$? En déduire la contrainte sur les valeurs possibles de ω qui résulte des CLs. Tracer le profil de la corde pour les deux valeurs de ω les plus basses.

II Quelques ordres de grandeur

1. Trouver l'énergie (en eV), la longueur d'onde et la fréquence des photons émis par:

   - un laser He-Ne, lumière rouge de longueur d'onde $\lambda = 632.8\,\text{nm}$. Comparer à l'énergie typique d'un électron dans un atome.
   - une source de rayons X d'énergie $E = 10\,\text{keV}$. Comparer à la longueur typique d'une maille cristalline qui est de quelques Å.
   - un micro-onde de fréquence $f = 2.45\,\text{GHz}$. Comparer à l'énergie typique de rotation d'une molécule qui est de l'ordre du meV.

2. Pour savoir s'il est nécessaire de prendre en compte les propriétés quantiques ondulatoires d'un système matériel, il faut construire à partir des grandeurs caractéristiques du système une quantité A dont la dimension est celle d'une action, et la comparer à la constante fondamentale $\hbar$. A peut être de type (énergie · temps) ou (quantité de mouvement · longueur). Si $A >> \hbar$, le système peut être considéré comme classique. Si au contraire $A \approx \hbar$, des propriétés ondulatoires apparaissent et la mécanique quantique doit être utilisée. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le système est quantique ou classique. Calculer aussi la longueur d'onde de De Broglie. Commenter.

   - Un électron (masse $m \approx 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) dans un fil de cuivre, d'énergie $E \approx 1\,\mathrm{eV}$ et soumis à des potentiels variant sur la maille cristalline de longueur $a \approx 4\,\text{Å}$
   - Un globule rouge de masse $m \approx 10^{-14}\,\mathrm{kg}$, vitesse $v \approx 1\,\mathrm{mm/s}$ dans un capillaire de diamètre $d \approx 10\,\mu\mathrm{m}$.
   - Une balle de golf de masse $m = 200\,\mathrm{g}$ et de vitesse $v = 25\,\mathrm{m/s}$

III Electron confiné en 3D

On considère une particule libre de masse m confiné dans une boite cubique de côté L. Le potentiel ressenti par la particule est nulle dans la boite et infini à l'exterieur. On admet que cela se traduit par la condition aux limite $\psi(x, y, z) = 0$ sur le bord de la boite.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger dans la boite. Le mettre sous la forme d'une somme de trois opérateurs portant sur trois variables indépendantes.
2. On en déduit qu'il faut chercher la solution stationnaire sous la forme $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Trouver les trois équations différentielles vérifiées par X, Y et Z.
3. Résoudre ces trois équations. Quelles sont les énergies possibles du système?
4. Représenter les 6 premiers niveaux d'énergie avec leur dégenerescence (nombre d'états quantiques de même énergie).

IV Modèle de Sommerfeld à deux dimensions

On considère un gaz de N électrons de masse m dans une boite quantique à deux dimensions de longueur L: le potentiel $V(x, y)$ ressenti par les électrons est nul et on suppose des conditions aux limites périodiques (Born Von Karman): $\psi(L, y) = \psi(0, y)$ et $\psi(x, L) = \psi(x, 0)$. On néglige également toute interaction entre les électrons.

1. Vérifier que la forme $\psi(x) = Ae^{i(k_x x + k_y y)}$ est une solution de l'équation de Schrödinger stationnaire pour un électron d'énergie E. Quelle est la relation de dispersion entre le vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y)$ et l'énergie E de l'électron? Comment déterminer le facteur A?
2. Quelles contraintes les conditions aux limites imposent-elles au vecteur d'onde et à l'énergie de l'électron? Comparer au cas des électrons non confinés. Quel volume un état occupe-t-il dans l'espace des $\vec{k}$?
3. En supposant la taille L de la boite suffisamment grande, définir un vecteur d'onde de Fermi k_F et une énergie de Fermi E_F, et relier ces deux quantités au nombre d'électrons N présents dans le gaz. Dessiner la surface de Fermi.
4. On peut de même définir une densité d'état en énergie $g(E)$ telle que $2g(E)dE$ soit le nombre d'états dont l'énergie est entre E et $E + dE$ (le 2 tient compte du spin des électrons). Représenter dans l'espace des vecteurs d'onde la zone correspondant aux états dont l'énergie est entre E et $E + dE$, puis calculer la densité d'état $g(E)$. Comparer à la densité d'état du gaz de Sommerfeld à trois dimensions.
5. Quelle est, qualitativement, l'effet de la température sur la distribution en énergie des électrons?