Contrôle de physique du solide
Année universitaire 2024-2025

Durée : 1h30

Est autorisée une feuille A4 recto de notes manuscrites.

Relation de De Broglie et de Planck-Einstein

On considère des neutrons therminque (dont la trajectoire peut-être décrite par la mécanique Newtonniene) à $T = 300$ K de masse $m_n = 1,673.10^{-27}$ kg.

1. Calculer leurs énergie (en Joule puis en eV) sachant qu'elle est donnée par la relation $E = \frac{3}{2}k_BT$ (On donne $k_B = 1,38065.10^{-23}$ J.K^{-1} et $1eV = 1,6022.10^{-19}$ J).
2. En déduire leurs vitesse.
3. Calculer la longueur d'onde et la fréquence de l'onde associée à cette particule (on donne $h = 6,626.10^{-34}$ J.s).
4. Ces neutrons se propage dans un cristal de paramètre de maille $a = 5$ Å. Ces particules peuvent-elles être considérées comme quantique ?
5. Quelle devrait être leurs température pour avoir la même énergie qu'un rayon X de longueur d'onde 10^{-10} m (on donne $c = 299\,792\,458$ m/s).

Constante de Planck :

1. Quelle est la dimension physique de la constante de Planck ? A quelle grandeur physique correspond-t-elle ?

   On considère l'expérience des doubles fentes appliquée aux électrons. Les électrons (de masse $9,109.10^{-31}$ kg) sont accélérés avec une énergie de $1,0$ eV (on rappelle que $1\,\text{eV} = 1,602.10^{-19}\,\text{J}$). Les fentes sont séparées d'une distance D.
2. Etablir une expression, basée sur les données physiques du problème, ayant la même dimension physique que la constante de Planck. A quelle condition les électrons pourront être considérés comme quantique dans ce problème ?
3. Donner la valeur minimale de D respectant cette condition. On donne h $= 6,626.10^{-34}$ J.s

Equation de Schrödinger :

On considère un cristal en deux dimensions, carré de côté L. Ce cristal est conducteur et nous allons traiter ses électrons de conduction dans le cadre du modèle de l'électron libre (modèle de Sommerfeld), vu en cours.

1. Citer les hypothèses de départ de ce modèle.
2. Soit $\psi(x, y)$ la fonction d'onde de l'électron. Rappeler la signification physique de $|\psi(x, y)|^2$.

Cette fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger qui, dans le cadre de l'électron libre, se ramène à l'équation différentielle

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=E\psi \tag{1}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et m la masse de l'électron.

3. On utilise les conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire que la fonction d'onde est périodique de période L : $\psi(x,y)=\psi(x,y+L)=\psi(x+L,y)$. La solution générale de l'équation de Schrödinger est $\psi(x,y)=\psi_0 e^{ik_x x}.e^{ik_y y}$. Montrer que $k_x=\frac{2n_x\pi}{L}$ et $k_y=\frac{2n_y\pi}{L}$, où n_x et n_y sont deux nombres entiers.
4. Un état quantique de l'électron est décrit par ces deux nombres entiers, ainsi qu'un troisième nombre quantique S. Comment s'appelle ce troisième nombre S ? Quelles valeurs peut-il prendre ? Dans la suite, on notera les états quantiques par (n_x,n_y,S).
5. Montrer, en utilisant l'équation 1, que l'énergie de l'électron vaut $E=\frac{2\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x^2+n_y^2\right)$.
6. Représenter approximativement les différents états quantiques possibles sur un axe représentant l'énergie, jusqu'à la valeur $E=16\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.
7. On suppose que le cristal contient 50 électrons. Représenter sur le même schéma la façon dont ceux-ci vont peupler les états quantiques à une température de 0 K. Quel principe de la mécanique quantique devez-vous utiliser ? Pourquoi s'applique t-il aux électrons ? Comment s'appelle l'énergie maximale atteinte ? A quel niveau d'énergie cela correspond-il ?